Листок 13. Закон больших чисел.

$\boxed{\textbf{DM-ML 87.}}$ В комнате находятся n мудрецов. На каждом мудреце находится колпак черного или белого цвета. Колпаки выдаются случайным образом независимо друг от друга. Каждый мудрец может видеть колпак всех остальных мудрецов, но не может видеть свою. Каждого мудреца спрашивают, не хочет ли он попробовать угадать цвет своей шляпы. Мудрец может попробовать или отказаться. Каждый мудрец делает выбор, не зная ответы остальных людей. Выигрывают или проигрывают мудрецы вместе. Они выигрывают, если все, кто решил отвечать, отвечают верно, и хотя бы один мудрец отвечает. Во всех других случаях люди проигрывают. Стратегия в игре — это набор функций для каждого мудреца, по которым они решают, что отвечать в зависимости от цветов колпаков остальных игроков.

- (а) Назовем граф G ориентированным подграфом n-мерного гиперкуба, если его вершины соответствуют бинарным строкам длины n и если существует ребро $u \to v$, то строки u, v различаются не более, чем в одном бите. Пусть $K(G)$ — количество вершин в графе G со входящей степенью не менее 1 и исходящей 0. Покажите, что максимальная вероятность победы в игре (по всем стратегиям) равна максимуму по выборам подграфа n-мерного гиперкуба величины $K(G)/2^n$.
- (б) Используя факт, что исходящая степень вершин не превосходит n, покажите, что $K(G)/2^n \leq \frac{n}{n+1}$ для любого графа G подграфа n-мерного гиперкуба.
- (в) Покажите, что если $n = 2^l - 1$, то существует граф G, для которого $K(G)/2^n = \frac{n}{n+1}$. (Подсказка: используйте коды Хемминга).

$\boxed{\textbf{DM-ML 88.}}$ Докажите, что среди любых

- (а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых, а из любых 10 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.
- (б) Покажите, что из 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.
- (в) Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

$\boxed{\textbf{DM-ML 89.}}$ Пусть $\mathbb{F}$ — поле остатков по простому модулю p. Выбираются случайно независимо два элемента $a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Покажите, что для любых фиксированных $x, y \in \mathbb{F}$, если $x \neq y$, то случайные величины $ax + b$ и $ay + b$ являются независимыми.

$\boxed{\textbf{DM-ML 90.}}$ Пусть $C : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n$ — это код Хемминга. Проверьте, что он является линейным кодом. Т.е. C(x+y)=C(x)+C(y), сумма векторов покомпонентная по модулю 2.

DM-ML 91. Пусть X — неотрицательная случайная величина, которая не равна тождественно нулю. Докажите, что $\Pr[X > 0] \geq \frac{(E[X])^2}{E[X^2]}$.

DM-ML 92. Два игрока играют в камень-ножницы-бумага, проигравший платит 1$ выигравшему, в случае ничьи никто никому не платит. Первый игрок выбирает случайным образом равновероятно камень, ножницы или бумагу. Может ли второй игрок действовать так, чтобы математическое ожидание его выигрыша было больше нуля?

DM-ML 93. Дан связный неориентированный граф G без кратных ребер и петель, с числом вершин $n > 2$. Каждое ребро графа независимо покрасили в черный или белый цвет равновероятно. Случайная величина X равняется числу вершин, из которых исходит четное число черных ребер.

(а) Вычислите $E[X]$;

(б) Вычислите $D[X]$.

DM-ML 27. Правило ослабления позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DM-ML 28.

(г) Покажите, что существует схема для сложения двух n-битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DM-ML 70. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DM-ML 73. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$. Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DM-ML 84. Покажите, что для любой случайной величины X выполняется неравенство: $\Pr[X = 0] \leq \frac{\mathrm{D}[x]}{\mathrm{E}[X]^2}$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 85.}}$

(б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\mathrm{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

$\boxed{\textbf{DM-ML 86.}}$ Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой.

(а) Покажите, что для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями.

(б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.