

## Листок 2. Пропозициональные формулы.

**Определение 1** Рассмотрим пропозициональные формулы, которые используют константу 1, конъюнкцию  $\wedge$  и сумму по модулю два  $\oplus$  (приоритет  $\wedge$  выше, чем  $\oplus$ ). Мономом будем называть константу 1 и конъюнкцию нескольких переменных. Многочленом Жегалкина называется формула вида  $m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_k$ , где  $m_i$  — различные мономы,  $k \geq 0$ . Пример:  $x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1$ .

**DM-ML 9.** Приведите к КНФ и ДНФ следующие функции:

(а)  $(x \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge z)$

(б)  $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$

**DM-ML 10.** Булева функция  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  называется монотонной, если при  $x \leq y$  выполняется  $f(x) \leq f(y)$  ( $x \leq y$ , если для всех  $1 \leq i \leq n$  выполняется  $x_i \leq y_i$ ).

(а) Докажите, что если пропозициональная формула использует только связки  $\vee$  и  $\wedge$ , то задаваемая ей булева функция монотонна.

(б) Докажите, что монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки  $\vee$  и  $\wedge$ .

**DM-ML 11.** Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, используя только одну бинарную связку: стрелку Пирса  $\downarrow$ : результат  $a \downarrow b$  совпадает с  $\neg(a \vee b)$  или штрих Шеффера  $\uparrow$ : результат  $a \uparrow b$  совпадает с  $\neg(a \wedge b)$ . Покажите, что других таких бинарных связок нет.

**DM-ML 12.** Рассмотрим пропозициональные формулы, которые используют константу 1, конъюнкцию  $\wedge$  и сумму по модулю два  $\oplus$  (приоритет  $\wedge$  выше, чем  $\oplus$ ). Мономом будем называть константу 1 и конъюнкцию нескольких переменных. Многочленом Жегалкина называется формула вида  $m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_k$ , где  $m_i$  — различные мономы,  $k \geq 0$ . Пример:  $x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1$ .

**DM-ML 13.**

(а) Представьте в виде многочлена Жегалкина  $\vee$ ,  $\wedge$  и  $\neg$ ;

(б) Докажите, что любая булева функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина.

(в) Докажите, что такое представление единственное с точностью до перестановки мономов.

**DM-ML 14.** Пусть формула  $\phi \rightarrow \psi$  является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула  $\tau$ , которая содержит только общие для  $\phi$  и  $\psi$  переменные, что формулы  $\phi \rightarrow \tau$  и  $\tau \rightarrow \psi$  являются тавтологиями.

**DM-ML 15.** Приведите пример булевой функции от  $n$  аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины  $n$ .

**DM-ML 16.** Две формулы, содержащие только переменные и связки  $\vee$ ,  $\wedge$  и  $\neg$  эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду  $\vee$  заменить на  $\wedge$  и наоборот.

---

**DM-ML 5.**

(б) Дано изображение плоского Эйлера графа (степени всех вершин четны, ребра не пересекаются). Докажите, что грани этого изображения можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке (так, чтобы соседние по ребру грани были бы покрашены в разные цвета).

**DM-ML 6.** В неориентированном графе  $2n$  вершин нет треугольников (циклов длины 3). Докажите, что число ребер в нем не превосходит  $n^2$ , причем оценка  $n^2$  достигается.

**DM-ML 7.** Дана однородная линейная система от  $n$  переменных (т.е. система, состоящая из уравнений вида  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ ), в которой меньше, чем  $n$  уравнений. Докажите, что система имеет ненулевое решение.

**DM-ML 8.** Докажите неравенство  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ .