Домашняя работа 1 (на 26.02).

Минимальный необходимый балл 8.

$\boxed{\textbf{COMB 1.}}$ (1,5 балла) Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geq n-2$, где n — количество вершин в графе. Доказать, что в этом случае $\kappa(G) = \delta(G)$. Предъявить для любого $n > 3$ граф с $\delta(G) = n-3$, у которого $\kappa(G) < \delta(G)$.

$\boxed{\textbf{COMB 2.}}$ (1,5 балла) Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geq (n+k-2)/2$, где n — количество вершин в графе, $n \geq k+1$. Доказать, что в этом случае G является k-связным графом, то есть что $\kappa(G) \geq k$.

$\boxed{\textbf{COMB 3.}}$ (2 балла) Пусть S есть произвольное подмножество множества $V(G)$ вершин простого связного графа G. Показать, что количество $\partial(S)$ ребер в реберном разрезе $\partial(S)$ рассчитывается по формуле

$$|\partial(S)| = \sum_{x \in S} \deg(x) - 2|E(G[S])|, \qquad (1)$$

где $G[S]$ — подграф, индуцированный подмножеством S. С использованием этого равенства доказать, что граф Петерсена является трехсвязным графом.

$\boxed{\textbf{COMB 4.}}$ (1,5 балла) С использованием равенства (1) доказать, что в графе Петерсена любой реберный разрез $\partial(S)$ мощности $|\partial(S)| = 3$ соответствует случаю $|S| = 1$.

$\boxed{\textbf{COMB 5.}}$ (1,5 балла) Пусть G есть произвольный простой граф, S — произвольное собственное подмножество множества $V(G)$ вершин этого графа. Используя равенство (1), показать, что в случае $|\partial(S)| < \delta(G)$ мощность $|S|$ подмножества S строго больше $\delta(G)$.

$\boxed{\textbf{COMB 6.}}$ (2,5 балла) Пусть G есть простой связный граф, диаметр которого равен двум, а $[S, \bar{S}]$, $|S| \leq |\bar{S}|$, — минимальный реберный разрез в этом графе. Доказать, что любая вершина $x \in S$ имеет хотя бы одну смежную с ней вершину $y \in \bar{S}$. Используя этот факт, показать, что в таком графе $\lambda(G) = \delta(G)$.

$\boxed{\textbf{COMB 7.}}$ (1 балл) *Сильной ориентацией* неориентированного графа назовем такой выбор направления для каждого из его ребер, что в результате этой операции получившийся ориентированный граф будет состоять из одной компоненты сильной связности. Доказать, что связный граф G допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда он реберно двусвязен, то есть тогда и только тогда в G отсутствуют мосты (Robbins, 1939).

$\boxed{\textbf{COMB 8.}}$ (1 балл) Доказать, что простой граф G, построенный на трех или более вершинах, двусвязен тогда и только тогда, когда для любой тройки различных вершин (x, y, z) в G есть простой путь из x в z, проходящий через y.