Практика 1 (решали 12.02).

$\boxed{\textbf{COMB 1.}}$ (0.5 балла) Доказать, что $\kappa(G) < n-1$ для всех графов G, отличных от K_n.
$\boxed{\textbf{COMB 2.}}$ (0.5 балла) Доказать, что у k-связного графа, построенного на n вершинах, должно быть как минимум $\lceil kn/2 \rceil$ ребер.
$\boxed{\textbf{COMB 3.}}$ (1 балл) Привести пример графа G с $\kappa(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$, $\delta(G) = 4$.
$\boxed{\textbf{COMB 4.}}$ (1,5 балла) Пусть у нас задана тройка натуральных чисел $\kappa < \lambda < \delta$. Привести алгоритм построения графа G, у которого $\kappa(G) = \kappa$, $\lambda(G) = \lambda$, а $\delta(G) = \delta$.
$\boxed{\textbf{COMB 5.}}$ (1,5 балла) Доказать, что для любого простого графа G с $\Delta(G) \leq 3$ реберная и вершинная связность совпадают.
$\boxed{\textbf{COMB 6.}}$ (1,5 балла) Доказать, что для любого 3-регулярного простого графа G реберная и вершинная связность совпадают.
$\boxed{\textbf{COMB 7.}}$ (1,5 балла) Построить наименьшие по количеству вершин 3-регулярные графы G_2 и G_3, для которых $\kappa(G_2) = 2$, $\kappa(G_3) = 3$.
$\boxed{\textbf{COMB 8.}}$ (1,5 балла) Предположим, что в связном графе G, построенном на $n \geq 2$ вершинах, нашлась пара вершин, не лежащих на одном цикле. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1. Возможна ситуация, когда все ребра графа похожи.
2. Существует полный граф с описанным в задаче свойством.
3. Если граф построен на трех вершинах, то ровно одна из них является точкой сочленения.
4. При числе ребер $m > 1$ каждое ребро обязано быть похожим хотя бы на одно другое.
5. В графе обязательно найдется вершина степени 1.
6. Граф может быть двусвязным.
7. Если граф построен на десяти вершинах, то в нем есть непохожие ребра.

$\boxed{\textbf{COMB 9.}}$ (0,5 балла) Выразить количество n вершин односвязного графа G через количество n_i этих вершин в каждом из k блоков $B_1, \ldots, B_k$ графа G.
$\boxed{\textbf{COMB 10.}}$ (0,5 балла) Выразить количество остовных деревьев односвязного графа G через количество остовных деревьев в каждом из k блоков $B_1, \ldots, B_k$ графа G.
$\boxed{\textbf{COMB 11.}}$ (1,5 балла) Граф называется кактусом, если каждый его блок представляет собой либо одиночное ребро, либо единственный цикл. В частности, любое дерево является кактусом. Предъявить кактусы, построенные на $2k+1$ и $2k$ вершинах соответственно и имеющие максимальное количество ребер. Доказать, что кактусы с большим количеством ребер при фиксированном k построить невозможно.
$\boxed{\textbf{COMB 12.}}$ (1 балл) Доказать, что любая вершина односвязного графа G имеет четную степень тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа Эйлеров.

$\boxed{\textbf{COMB 13.}}$ (1 балл) Доказать, что односвязный граф G является реберно k-связным тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа реберно k-связный.

$\boxed{\textbf{COMB 14.}}$ (1,5 балла) Модифицировать алгоритм Хопкрофта-Тарьяна для поиска мостов в односвязном графе G. Реализовать алгоритм поиска всех блоков и точек сочленения в односвязном простом графе G.

$\boxed{\textbf{COMB 15.}}$ (1 балл) Описать разложение на ручки для графа Петерсена.

$\boxed{\textbf{COMB 16.}}$ (1,5 балла) Доказать, что граф G является реберно двусвязным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_k,$$

где G_0 — произвольный цикл в графе G, а G_i, $i > 0$, представляет собой либо ручку, либо замкнутую ручку для подграфа $G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{i-1}$ графа G.