Практика 3 (решали 25.02).

$\boxed{\textbf{COMB 1.}}$ (0,5 балла) Пусть G есть вершинно двусвязный граф, и пусть вершины x и y этого графа соединены в G путем P. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: в графе G найдется путь Q, соединяющий x и y и не пересекающийся с P ни в каких внутренних вершинах этого пути.
$\boxed{\textbf{COMB 2.}}$ (1 балл) Пусть D есть орграф, построенный на множестве вершин $[12] = \{1, 2, \ldots, 12\}$, в котором из i в j проведено ребро тогда и только тогда, когда i делит j. Определить $\lambda(1, 12)$ в таком графе.
$\boxed{\textbf{COMB 3.}}$ (1,5 балла) Доказать, что после удаления произвольного ребра $e = (x, y)$ в орграфе D вершинная связность κ этого орграфа уменьшится как максимум на единицу, то есть что $\kappa(D - e) \geq \kappa(D) - 1$.
$\boxed{\textbf{COMB 4.}}$ (1,5 балла) С помощью теоремы Менгера доказать вершинную k-связность k-мерного гиперкуба Q_k.

$\boxed{\textbf{1,5 балла 1.8.}}$ Предположим, что в связном графе G, построенном на $n \geq 2$ вершинах, нашлась пара вершин, не лежащих на одном цикле. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

1. Возможна ситуация, когда все ребра графа похожи.
2. Существует полный граф с описанным в задаче свойством.
3. Если граф построен на трех вершинах, то ровно одна из них является точкой сочленения.
4. При числе ребер $m > 1$ каждое ребро обязано быть похожим хотя бы на одно другое.
5. В графе обязательно найдется вершина степени 1.
6. Граф может быть двусвязным.
7. Если граф построен на десяти вершинах, то в нем есть непохожие ребра.

$\boxed{\textbf{0,5 балла 1.10.}}$ Выразить количество остовных деревьев односвязного графа G через количество остовных деревьев в каждом из k блоков $B_1, \ldots, B_k$ графа G.
$\boxed{\textbf{1,5 балла 1.11.}}$ Граф называется кактусом, если каждый его блок представляет собой либо одиночное ребро, либо единственный цикл. В частности, любое дерево является кактусом. Предъявить кактусы, построенные на $2k + 1$ и $2k$ вершинах соответственно и имеющие максимальное количество ребер. Доказать, что кактусы с большим количеством ребер при фиксированном k построить невозможно.
$\boxed{\textbf{1 балл 1.12.}}$ Доказать, что любая вершина односвязного графа G имеет четную степень тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа Эйлеров.
$\boxed{\textbf{1 балл 1.13.}}$ Доказать, что односвязный граф G является реберно k-связным тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа реберно k-связный.

$\boxed{\textbf{1,5 балла 1.14.}}$ Модифицировать алгоритм Хопкрофта-Тарьяна для поиска мостов в односвязном графе G. Реализовать алгоритм поиска всех блоков и точек сочленения в односвязном простом графе G.

$\boxed{\textbf{1 балл 1.15.}}$ Описать разложение на ручки для графа Петерсена.

$\boxed{\textbf{1,5 балла 1.16.}}$ Доказать, что граф G является реберно двусвязным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_k,$$

где G_0 — произвольный цикл в графе G, а G_i, $i > 0$, представляет собой либо ручку, либо замкнутую ручку для подграфа $G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{i-1}$ графа G.