**Домашняя работа 5. Теория графов.**

Необходимо наборать 6 баллов.

$\boxed{\textbf{COMB 64.}}$ (1 балл) Постройте пример такого графа $G$, что его графова последовательность равна $(n, n, n-1, n-1, \ldots, 2, 2, 1, 1)$.

$\boxed{\textbf{COMB 65.}}$ (2 балла) Собственным числом графа $G$ называется собственное число матрицы $M_a$ смежности этого графа ($\lambda$ — это собственное число матрицы $M$, если существует такой вектор $v$, что $Mv = \lambda v$).

Доказать, что $k$-регулярный граф $G$ имеет собственное число $\lambda = k$.

$\boxed{\textbf{COMB 66.}}$ (1 балл) Доказать, что для произвольного турнира T справедливо равенство $\sum\limits_{v \in V(T)} (\mathrm{indeg(v)})^2 = \sum\limits_{v \in V(T)} (\mathrm{outdeg(v)})^2$.

$\boxed{\textbf{COMB 67.}}$ (2 балла) Орграф $D$ называется сбалансированным, если для любой вершины $x \in V(D)$ выполняется неравенство $|\mathrm{outdeg}(x) - \mathrm{indeg}(x)| \leq 1$.

Доказать, что из любого неориентированного графа $G$ можно получить направленный сбалансированный орграф $D$

$\boxed{\textbf{COMB 68.}}$ (1 балл). Пусть $G$ есть граф, построенный на вершинах 1, $\ldots$, 15, в котором вершины $i$ и $j$ смежны тогда и только тогда, когда их наибольший общий делитель больше единицы. Подсчитать количество связных компонент такого графа, а также определить максимальную длину простого пути в графе $G$.

$\boxed{\textbf{COMB 69.}}$ (1 балл). Доказать, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.