Практика 7. Деревья.

$\boxed{\textbf{COMB 87.}}$ Пусть T_D есть ориентированное дерево, а $F \subseteq E(T_D)$ есть произвольное подмножество множества ребер дерева T_D. Доказать, что в дереве T найдется вершина x, такая, что все ребра из F, инцидентные x, входят в x, а все ребра из подмножества $E(T_D) \setminus F$, инцидентные x, из этой вершины выходят.

$\boxed{\textbf{COMB 88.}}$ Наряду с диаметром при изучении расстояний в графе часто используется так называемый Wiegner index

$$W(G) := \sum_{x,y \in V(G)} d(x,y)$$

графа G, характеризующий среднее расстояние между вершинами в графе. В частности, Вигнер использовал этот индекс для изучения точки плавления парафина. В дальнейшем оказалось, что многие химические свойства молекул связаны с Wiegner index соответствующих этим молекулам графов. Доказать, что среди всех деревьев на n вершинах минимальное значение $W(G)$ достигается на графах-звездах, а максимальное — на путях P_n длины n.

$\boxed{\textbf{COMB 89.}}$ Пусть у нас имеется какое-то множество G, а также некоторый набор $H_1, \dots, H_k$ его подмножеств. Говорят, что набор таких подмножеств обладает свойством Хелли (Helly property), если из того, что любая пара таких подмножеств имеет непустое пересечение, следует, что пересечение всех этих подмножеств не пусто. Так, если у нас имеется набор попарно пересекающихся интервалов на прямой, то их пересечение непусто. Доказать, что поддеревья любого дерева обладают свойством Хелли. Иными словами, доказать, что для любого набора $T_1, \dots, T_k$ поддеревьев дерева T, любые два их которых имеют непустое пересечение, найдется общая для всех этих поддеревьев вершина x. Показать, что в случае связного графа, деревом не являющегося, это свойство может и не выполняться

$\boxed{\textbf{COMB 90.}}$ Подсчитать количество всех деревьев, построенных на множестве вершин $[n]$, у которых вершина с меткой i имеет степень d_i. Вывести отсюда формулу Cayley для количества всех деревьев на n вершинах.

$\boxed{\textbf{COMB 91.}}$ Зафиксируем k-элементное множество вершин $A = \{1, \dots, k\}$. Обозначим через $T_{n,k}$ количество корневых помеченных лесов на множестве $\{1, \dots, n\}$, $n \geq k$, состоящих из k деревьев, корнями которых являются вершины множества A. Доказать следующую рекуррентную формулу для чисел $T_{n,k}$: $T_{n,k} = \sum\limits_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1,k-1+i}$, $T_{0,0} = 1$ и для всех $n > 0$ верно $T_{n,0} = 0$. С ее помощью доказать, что $T_{n,k} = k \cdot n^{n-k-1}$, и в частности, что $T_{n,1} = n^{n-2}$.