

Задание 10 (на 16.11).

ML 48. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Z}, =, <, +, 0, 1)$

ML 49. Пусть T теория следующего языка: $\{<, R, B\}$, где R (red) и B (blue) унарные предикаты.

T содержит все аксиомы плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, а также:

$$\forall xy \exists zw (x < z < w < y \wedge R(z) \wedge B(w))$$

$$\forall x (R(x) \vee B(x))$$

$$\forall x (R(x) \leftrightarrow \neg B(x)).$$

Докажите, что любые интерпретации данной теории на счетном множестве изоморфны.

Две интерпретации одной сигнатуры называются элементарно эквивалентными, если каждая замкнутая формула в первой интерпретации верна тогда и только тогда, когда она верна во второй.

ML 50. Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N} + \mathbb{N}, =, <)$. (Две копии нат. чисел, все элементы из второй копии больше элементов из первой).

ML 51. Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N} + \mathbb{Z}, =, <)$.

ML 52. Будет ли интерпретация $(\mathbb{Q}, =, <)$ элементарно эквивалентна:

(а) $(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}, =, <)$,

(б) $(\mathbb{Q} + \mathbb{R}, =, <)$.

ML 38. Докажите, что существует такое множество $S \subseteq \mathbb{N}$, что для любого бесконечного перечислимого множества A множества $A \cap S$ и $A \setminus S$ имеют бесконечный размер.

ML 43. Докажите, что:

(а) множество \mathbb{Q} со стандартным порядком изоморфно множеству \mathbb{Q}_+ (множество положительных рациональных чисел) со стандартным порядком (т. е. существует биекция, которая сохраняет порядок);

(б) счетное множество M , на котором задан плотный порядок (т.е. между любыми двумя элементами есть еще один элемент) и в котором нет минимального и максимального элемента, изоморфно множеству \mathbb{Q} со стандартным порядком;

(в) любая замкнутая формула логики первого порядка истинна в интерпретации $(M, <)$ (где M — счетное множество без минимального и максимального элемента, а порядок $<$ плотный) тогда и только тогда, когда она истинна в интерпретации $(\mathbb{Q}, <)$;

ML 44. Покажите, что в интерпретации $(\mathbb{Z}, =, <)$ предикат $y = x + 1$ невыразим при помощи бескванторной формулы.

ML 45. Выразим ли предикат $x = 0$ в интерпретации $(\mathbb{N}, =, <)$

(а) бескванторной формулой;

(б) любой формулой.

ML 46. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, +)$? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

ML 47. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, S)$, где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.